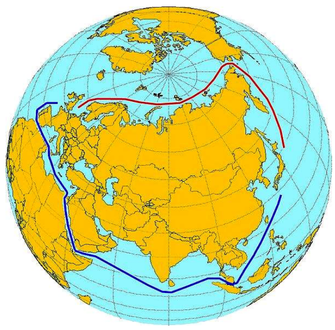
INTERROGATION DE NAVIGATION

NOM	Cours : Mercator, loxodromie échelle locale	
DUREE 1 heure 30	tout candidat pris en flagrant délit de fraude ou convaincu de tentative de fraude sera immédiatement exclu de la salle d'examen et risque l'exclusion temporaire ou définitive de toute école et d'une ou plusieurs sessions d'examen sans préjudice de l'application des sanctions prévues par les lois et règlements en vigueur réprimant les fraudes dans les examens et concours publics	/ 20

Le passage du Nord-Est est une voie maritime qui permet de relier l'océan Atlantique à l'océan Pacifique en longeant la côte nord de la Sibérie. Il emprunte le cap Nord, le détroit de Kara, le cap Tcheliouskine et aboutit au détroit de Béring, la plupart de son trajet s'effectuant dans les mers arctiques.
Il n'est navigable qu'en été. Mais des chenaux de navigation sont ouverts par de puissants brise-glace nucléaires russes pour étendre au maximum la période de navigation sur cette voie stratégique.



Pour toutes les questions, on considèrera que la route envisagée passe entre les îles.

Un navire quitte Tromsø (Norvège) et emprunte le passage du Nord-Est vers Uelen (Sibérie Orientale).

Tromsø $\begin{cases} \varphi_1 = 69^\circ 39{,}5' N \\ G_1 = 018^\circ 58' E \end{cases}$ **Uelen** $\begin{cases} \varphi_2 = 66^\circ 15{,}4' N \\ G_2 = 169^\circ 54{,}3' W \end{cases}$

La route orthodromique passant dans la banquise du pôle Nord, le commandant décide de ne pas dépasser le parallèle de latitude $\varphi = 77°$ N.
Il souhaite suivre le chemin le plus court sans dépasser cette latitude et vous demande de préparer la route sur la carte.

Etudier :

- ***l'orthodromie 1 de Tromsø au point I_1 de latitude $\varphi = 77°$ N***
- ***la loxodromie de I_1 au point I_2 de latitude $\varphi = 77°$ N***
- ***l'orthodromie 2 du point I2 à Uelen***

ENMM MARSEILLE
PEMLB

$G_2 - G_1 =$ 188,872°	>180° donc il faut prendre la route par l'Est	
$g =$ -171,128°		$g = 360° - (G2 - G1)$
$m_o =$ 2636,8 M		$m_o = 60 \cdot \arccos(\sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 \cdot \cos g)$
$A =$ 005,133°		$A = \arccos((\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \cos(m_o/60)) / (\cos\varphi_1 \cdot \sin(m_o/60)))$
$V =$ 05,133°	puisque g < 0 on obtient	$V = A$
$\lvert\varphi_v\rvert =$ 88,218°		$\lvert\varphi_v\rvert = \arccos(\cos\varphi_1 \cdot \sin A)$
$\varphi_v =$ 88° 13,1' N	puisque A < 90 on obtient	$\varphi > 0$ latitude NORD
$\lvert G_v - G_A \rvert =$ 85,185°		$\lvert G_v - G_1 \rvert = \arccos(\tan\varphi_1 / \tan\varphi_v)$
$G_v =$ 104° 09,1' E	puisque g<0 on obtient	$Gv = G1 - \arccos(\tan\varphi1 / \tan\varphi v)$
$\alpha =$ 0,965 °	correction de Givry	$\alpha = (\text{durée} \cdot V_f) / 120 \cdot \sin V \cdot \tan\varphi_1$
$R_{f\ loxo} =$ 006,1°	pour le 1er tronçon	$R_{f\ loxo} = V + \alpha$
$R_{f\ quart\ loxo} =$ 087,0°	pour une route loxo de 1 vers 2	$R_{f\ quart\ loxo} = \arctan(\lvert g\rvert / \lvert\lambda\rvert)$
$m_{loxo} =$ 3851,3 M		$m_{loxo} = 60 \cdot \lvert l \rvert / \cos R_{f\ quart\ loxo}$
$gain_{ortho/loxo} =$ 1214,5 M		

1 ***Calculer les coordonnées des points I_1 et I_2***

/ 4

$\begin{cases} \varphi_{I1} = \\ G_{I1} = \end{cases}$	$\begin{cases} \varphi_{I2} = \\ G_{I2} = \end{cases}$

Pour les questions 2, 3 et 4 on utilisera les points suivants : $I_1 \begin{cases} \varphi_{I1} = 77^\circ N \\ G_{I1} = 071^\circ E \end{cases}$ **et** $I_2 \begin{cases} \varphi_{I2} = 77^\circ N \\ G_{I2} = 131^\circ E \end{cases}$

	6

2 <u>Calculer la distance de chaque orthodromie, de la loxodromie et la distance totale</u>

m_{o1} =	m_{loxo} =	m_{o2} =	m_{total} =

Pour les questions 3 et 4 on utilisera les points suivants : I1 $\begin{cases}\varphi_{I1} = 77^\circ N \\ G_{I1} = 071^\circ E\end{cases}$ et I2 $\begin{cases}\varphi_{I2} = 77^\circ N \\ G_{I2} = 131^\circ E\end{cases}$

	5

3 Calculer la route initiale pour un premier tronçon de loxodromie de 36 heures à 15 nds

$V_{o1} =$	$\alpha_{o1} =$	$R_{f\ loxo\ 1} =$

Pour la question 4 on utilisera les points suivants : I1 $\begin{cases} \varphi_{I1} = 77^\circ N \\ G_{I1} = 071^\circ E \end{cases}$ et I2 $\begin{cases} \varphi_{I2} = 77^\circ N \\ G_{I2} = 131^\circ E \end{cases}$

5

4 ***Calculer la route finale pour un dernier tronçon de loxodromie de 36 heures à 15 nds***

$V_{o2} =$	$\alpha_{o2} =$	$R_{f\,loxo\,2} =$

NOTATIONS ET FORMULES DE NAVIGATION

Loxodromie

φ	latitude
G	longitude
Λ	latitude croissante
l	variation de latitude
g	variation de longitude
λ	variation de latitude croissante
e	distance pour une route E/W
m_l	distance loxodromique
R_F	route-fond
R_{Fq}	route-fond-quart
φ_M	latitude moyenne
u	unité de la carte
Δx	largeur de la carte en mm
Δy	hauteur de la carte en mm

échelle... de la carte d'unité u à la latitude φ

$$l = \varphi_2 - \varphi_1 \qquad g = G_2 - G_1 \qquad e = 60 \cdot g \cdot cos(\varphi_M)$$

$$\Lambda = \frac{180}{\pi} \cdot ln\left(tan\left(45 + \frac{\varphi}{2} \right) \right) \qquad l = \frac{m_l}{60} \cdot cos(R_F)$$

formules exactes

$$g = -\lambda \cdot tan(R_F)$$

$$R_{Fq} = arctan\left(\frac{|g|}{|\lambda|} \right)$$

$$m_l = \frac{60 \cdot |l|}{cos(R_{Fq})}$$

formules approchées

$$g = -\frac{m \cdot sin(R_F)}{60 \cdot cos(\varphi_M)}$$

$$R_{Fq} = arctan\left(\frac{|g| \cdot cos(\varphi_M)}{|l|} \right)$$

$$m_l = \frac{60 \cdot |g| \cdot cos(\varphi_M)}{sin(R_{Fq})}$$

$$\varphi_M = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

$$u^{mm/' de G} = \frac{\Delta x^{mm}}{|g'|} = \frac{\Delta y^{mm}}{|\lambda'|} \qquad échelle = \frac{u^{mm/' de G}}{1852 \cdot 10^3 \cdot \cos(\varphi)}$$

Orthodromie

m_o	distance orthodromique
A	angle entre cercle orthodromique et méridien du point de départ (<180°)
V	route-fond orthodromique initiale (<360°)
φ_V	latitude du vertex
G_V	longitude du vertex
Δt	durée du 1er tronçon de loxodromie
V_F	vitesse-fond
α	correction de Givry
R_F	route-fond du 1er tronçon de loxodromie

$$g = G_2 - G_1 \quad ; \quad \text{chemin le plus court pour } |g| < 180°$$

$$m_o = 60 \cdot arcos\left(sin(\varphi_1) \cdot sin(\varphi_2) + cos(\varphi_1) \cdot cos(\varphi_2) \cdot cos(g) \right)$$

$$A = arcos\left(\frac{sin(\varphi_2) - sin(\varphi_1) \cdot cos\left(\frac{m_o}{60} \right)}{cos(\varphi_1) \cdot sin\left(\frac{m_o}{60} \right)} \right) \qquad \begin{cases} g > 0 \Rightarrow V = 360 - A \\ g < 0 \Rightarrow V = A \end{cases}$$

$$|\varphi_V| = arcos\left(cos(\varphi_1) \cdot sin(A) \right) \qquad \begin{cases} A < 90° \Rightarrow \varphi > 0 \\ A > 90° \Rightarrow \varphi < 0 \end{cases}$$

$$G_V = G_1 \pm arcos\left(\frac{tan(\varphi_1)}{tan(\varphi_V)} \right) \qquad \begin{cases} g > 0 \Rightarrow signe + \\ g < 0 \Rightarrow signe - \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\Delta t \cdot V_F}{120} \cdot sin(V) \cdot tan(\varphi_1) \qquad R_F = V + \alpha$$

1 <u>Calculer les coordonnées des points I_1 et I_2</u>

/ 4

On cherche I_1 le vertex situé sur le parallèle $\varphi = 77°N$ et dont l'orthodromie (arc de grand cercle) passe par Tromsø. La formule reliant les coordonnées du vertex avec celles d'un point quelconque de l'orthodromie est $G_{I1} = G_1 \pm \arccos\left(\frac{\tan \varphi_1}{\tan \varphi_{I1}}\right)$

De Tromsø vers I_1 on fait route vers l'Est donc on gardera dans la formule le signe ⊖

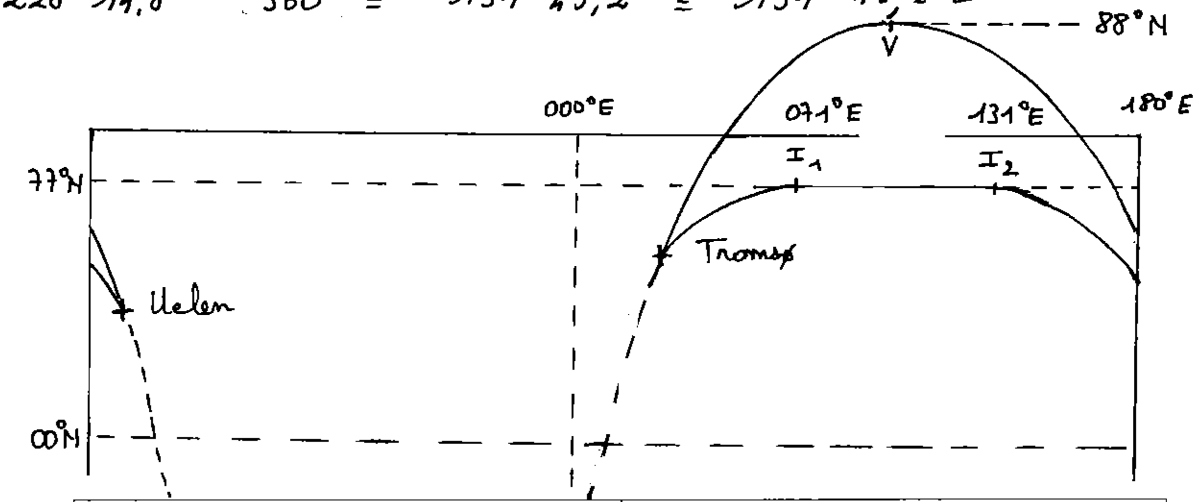
$G_{I1} = (-18°58') - \arccos\left(\frac{\tan 69°39,5'}{\tan 77°}\right) = -70°27,1' = 070°27,1'E$

On cherche I_2 le vertex situé sur le parallèle $\varphi = 77°N$ et dont l'orthodromie (arc de grand cercle) passe par Uelen. De Uelen vers I_2 on se déplace vers l'Ouest donc on utilisera la même formule que pour I_1 mais avec le signe ⊕

$G_{I_2} = (+169°54,3') + \arccos\left(\frac{\tan 66°15,4'}{\tan 77°}\right) = +228°14,8'$

Le nombre sort de l'intervalle traditionnel des longitudes, entre $-180°$ et $+180°$. Pour y revenir, puisque les longitudes sont des angles mesurés depuis le centre de la Terre le long des parallèles qui font 360° de circonférence, on peut ajouter ou retrancher 360° autant de fois que nécessaire :

$G_{I2} = +228°14,8' - 360° = -131°45,2' = 131°45,2'E$



$\varphi_{I1} =$ 77°N $G_{I1} =$ 070°27,1'E	$\varphi_{I2} =$ 77°N $G_{I2} =$ 131°45,2'E

Pour les questions 2, 3 et 4 on utilisera les points suivants : $I_1 \begin{cases} \varphi_{I1} = 77^\circ N \\ G_{I1} = 071^\circ E \end{cases}$ et $I_2 \begin{cases} \varphi_{I2} = 77^\circ N \\ G_{I2} = 131^\circ E \end{cases}$

/ 6

2 Calculer la distance de chaque orthodromie, de la loxodromie et la distance totale

de Tromsø à I_1 :

$g = G_{I1} - G_1 = (-071^\circ) - (-18^\circ 58') = -52^\circ 2'$

$m_{o1} = 60 . \arccos\left(\sin(69^\circ 39,5') . \sin(77^\circ) + \cos(69^\circ 39,5') . \cos(77^\circ) . \cos(-52^\circ 2')\right)$

$m_{o1} = 954,4\ M$

de I_1 à I_2 : route à l'Est le long du parallèle $\varphi = 77^\circ N$

$g = G_{I2} - G_{I1} = (-131^\circ) - (-071^\circ) = -60^\circ$

$m_{loxo} = 60 . |g| . \cos\varphi = 60 . |-60^\circ| . \cos 77^\circ = 809,8\ M$

de I_2 à Uelen :

$g = G_2 - G_{I2} = (-131^\circ) - (+169^\circ 54,3') = -300^\circ 54,3'$

$g = -300^\circ 54,3' + 360^\circ = +59^\circ 5,7'$

$m_{o2} = 60 . \arccos\left(\sin(77^\circ) . \sin(66^\circ 15,4') + \cos(77^\circ) . \cos(66^\circ 15,4') . \cos(59^\circ 5,7')\right)$

$m_{o2} = 1212,7\ M$

la distance totale est $m_{totale} = m_{o1} + m_{loxo} + m_{o2} = 2976,9\ M$

comparons le parcours mixte à la route orthodromique :

$m_{totale} - m_{ortho} = 2976,9\ M - 2636,8\ M = 340,1\ M$

comparons le parcours mixte à la route loxodromique :

$m_{loxo} - m_{totale} = 3851,3\ M - 2976,9\ M = 874,4\ M$

ces comparaisons sont purement théoriques puisque la loxodromie passe au-dessus du continent et que l'orthodromie passe au-dessus de la banquise arctique.

m_{o1} = 954,4 M	m_{loxo} = 809,8 M	m_{o2} = 1212,7 M	m_{total} = 2976,9 M

Pour les questions 3 et 4 on utilisera les points suivants : I1 $\begin{cases}\varphi_{I1} = 77° N \\ G_{I1} = 071° E\end{cases}$ et I2 $\begin{cases}\varphi_{I2} = 77° N \\ G_{I2} = 131° E\end{cases}$

/ 5

3 Calculer la route initiale pour un premier tronçon de loxodromie de 36 heures à 15 nds

sur l'orthodromie passant par Tromsø et de vertex I_1
on cherche l'angle de route initial :

$$A_1 = \arccos\left(\frac{\sin 77° - \sin 69°39{,}5' \cdot \cos\left(\frac{954{,}4M}{60}\right)}{\cos(69°39{,}5') \cdot \sin\left(\frac{954{,}4M}{60}\right)}\right) = 40{,}323°$$

$g < 0$ donc $V_1 = A_1 = 040{,}323°$
calcul de la correction de Givry :

$$\alpha_1 = \frac{15\,nds \cdot 36h}{120} \times \sin(40{,}323°) \cdot \tan(69°39{,}5') = 7{,}854°$$

$$R_{F1} = V_1 + \alpha_1 = 40{,}32° + 7{,}85° = 48{,}17 = 048{,}2°$$

durant 36 heures à 15 nds, le premier tronçon de loxodromie suivra la route-fond $R_{F1} = 048{,}2°$

Remarque : la longueur du tronçon de loxodromie est $36h \cdot 15\,nds = 540M$ alors que la distance orthodromique de Tromsø à I_1 est $m_{O1} = 954{,}4M$: il est donc certain que ce premier tronçon de loxodromie n'arrivera pas au-delà de I_1.

Remarque : en prenant les vraies coordonnées du point I_1 ($G_{I1} = 070°27{,}1'$ E) on aurait trouvé $R_{F1} = 048{,}2°$ avec $V_1 = 40{,}325°$ et $\alpha_1 = 7{,}855°$
le résultat est donc très proche malgré une modification de la longitude du vertex dans l'interrogation de $g = 32{,}9'$. Ceci est normal car à haute latitude, la distance correspondante est très faible : $m = 60 / g / \cdot \cos\varphi$
$m = 60 \cdot / 0°32{,}9' / \cdot \cos 77° = 7{,}4\,M$

V_{o1} = 040,32°	α_{o1} = + 7,85°	$R_{f\,loxo\,1}$ = 048,2°

Pour la question 4 on utilisera les points suivants : I1 $\begin{cases}\varphi_{I1} = 77^\circ N \\ G_{I1} = 071^\circ E\end{cases}$ et I2 $\begin{cases}\varphi_{I2} = 77^\circ N \\ G_{I2} = 131^\circ E\end{cases}$

5

4 Calculer la route finale pour un dernier tronçon de loxodromie de 36 heures à 15 nds

Pour chercher la route-fond loxodromique du tronçon finissant sur Melon en suivant l'orthodromie de I_2 à Melon, il est plus simple de partir en sens inverse puis d'ajouter/retrancher 180°. En effet la formule de l'angle de route initial et celle de la correction de Givry imposent de connaître les coordonnées du point de départ : ce n'est pas le cas !

Calculons l'angle de route initial en partant de Melon vers I_2 :

$$A'_2 = \arccos\left(\frac{\sin 77^\circ - \sin 66^\circ 15{,}4' \cdot \cos\left(\frac{1212{,}7\,M}{60}\right)}{\cos 66^\circ 15{,}4' \cdot \sin\left(\frac{1212{,}7\,M}{60}\right)}\right) = 33{,}962^\circ$$

de Melon vers I_2, on fait route à l'Ouest donc $g > 0$

et $V'_2 = 360^\circ - A'_2 = 326{,}038^\circ$

calcul de la correction de Givry :

$$\alpha'_2 = \frac{36h \cdot 15\,nds}{120} \cdot \sin(326{,}038^\circ) \cdot \tan(66^\circ 15{,}4') = -5{,}715^\circ$$

$R'_{F2} = V'_2 + \alpha'_2 = 326{,}038^\circ + (-5{,}715^\circ) = 320{,}32^\circ$

enfin $R_{F2} = R'_{F2} - 180^\circ = 140{,}3^\circ$

Remarque : en prenant la vraie longitude de I_2 ($G_{I2} = 131^\circ 45{,}2'E$) on aurait trouvé $R'_{F2} = 326{,}035^\circ + (-5{,}716^\circ) = 320{,}3^\circ$
en effet l'écart entre la vraie longitude et celle de la question 4 décale I_2 de $m = 60 \cdot |g| \cdot \cos\varphi = 60 \cdot |0^\circ 45{,}2'| \cdot \cos 77^\circ = 10{,}2\,M$

Remarque : la question 4 est très théorique car le résultat serait inutile si on ne calculait pas le point de départ de ce dernier tronçon.

$V_{o2} =$ 146,0° (326,0°)	$\alpha_{o2} =$ −5,70	$R_{f\,loxo\,2} =$ 140,3° (320,3°)