LES NOMBRES COMPLEXES

sommaire

LES NOMBRES COMPLEXES

1 le corps des complexes

1.1 forme algébrique d'un complexe

à tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *, on associe le nombre complexe* $z = x + i\,y$
avec i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$
on appelle <u>partie réelle</u> de z $Re(z) = x$
et <u>partie imaginaire</u> de z $Im(z) = y$

la <u>forme algébrique</u> (ou cartésienne) du complexe z est notée $\boxed{z = Re(z) + i\,.\,Im(z)}$

par conséquent,
$Re(z) = 0$ Û *z est « imaginaire pur » (noté aussi z* Î $i\mathbb{R}^*$*)*
$Im(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
0 Î $\mathbb{R}$ *n'est pas considéré comme un imaginaire pur*

l'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$
$\mathbb{C}$ *muni de l'addition et de la multiplication a une structure de corps commutatif.*

attention !
les inégalités $\leq, \geq, <, >$ *ne sont pas valables entre nombres complexes*
l'ensemble des imaginaires purs noté « $i\,\mathbb{R}^*$ *» est différent de* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

1.2 nombre opposé, inverse

de même que pour les réels, le nombre –z est appelé <u>opposé du complexe z</u>
et " $z \in \mathbb{C}^*$*, le nombre* $\frac{1}{z}$ *est appelé <u>inverse du complexe z</u>*

1.3 nombre conjugué

1.3.1 définition

on appelle $\bar{z}$ *<u>nombre complexe conjugué de z</u> le complexe défini par* $\boxed{\bar{z} = Re(z) - i\,.\,Im(z)}$
par exemple : $\bar{i} = -i$
$\overline{3+4i} = 3 - 4\,i$

1.3.2 propriétés

" *a et b complexes,*
$Re(\bar{a}) = Re(a)$
$Im(\bar{a}) = -Im(a)$
$a + \bar{a} = 2\,Re(a)$
$a - \bar{a} = 2\,i\,Im(a)$
$\bar{\bar{a}} = a$
$\bar{a}\,.\,a = (Re(a))^2 + (Im(a))^2 = |a|^2$

" a ¹ 0, $\overline{\left(\frac{1}{a}\right)} = \frac{1}{\bar{a}}$
$\bar{a} = a$ Û a Î $\mathbb{R}$
$\bar{a} = -a$ Û *a est imaginaire pur*
$\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$
$\overline{a \cdot b} = \bar{a}\,.\,\bar{b}$
" b ¹ 0, $\overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$

1.3.3 applications

identité remarquable sur $\mathbb{C}$ " *x, y* Î $\mathbb{C}$ $\boxed{(x+ i\,y)\,(x - i\,y) = x^2 + y^2}$

rendre réel le dénominateur d'un quotient : multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur

" *a, b, c, d* Î $\mathbb{R}$ *avec (c, d)* ¹ *(0, 0)* $z = \dfrac{a+ib}{c+id} = \dfrac{(a+ib)\cdot(c-id)}{(c+id)\cdot(c-id)} = \dfrac{(ac+db)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$

2 forme trigonométrique d'un complexe

2.1 module d'un complexe

2.1.1 définition

" *z* Î $\mathbb{C}$ *noté z = x + i y avec x, y* Î $\mathbb{R}$

on appelle <u>*module*</u> $|z|$ *du complexe z le* ***réel positif*** *défini par* $\boxed{|z| = \sqrt{x^2+y^2}}$

2.1.2 propriétés

" *a et b complexes,*

$\overline{a}\,.\,a = |a|^2$

$|\overline{a}| = |a|$

$|a^n| = |a|^n$ " *n* Î $\mathbb{Z}$

$|a\cdot b| = |a|\cdot|b|$

si b ¹ *0 ,* $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

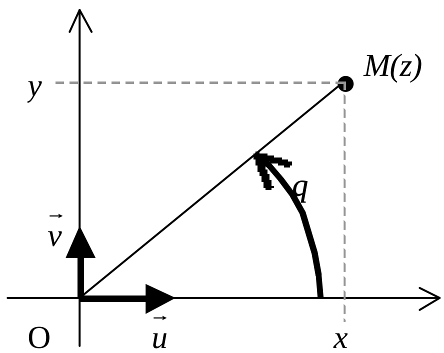
$|a+b| \leq |a| + |b|$ *« inégalité triangulaire »*

attention, erreur courante !
" *z* Î $\mathbb{C}$
z^2 *est un complexe*
$|z|^2$ *est un réel positif*
et " *z* Î $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ *,* z^2 ¹ $|z|^2$

2.2 argument d'un complexe

2.2.1 définition

si on représente le complexe z= x + i y (avec x, y Î $\mathbb{R}$ *)*
dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{u}$ *,* $\vec{v}$ *) par*
le point M de coordonnées (x, y)
on appelle <u>*argument*</u> *du complexe z le* ***réel q défini à 2 p près*** *par*



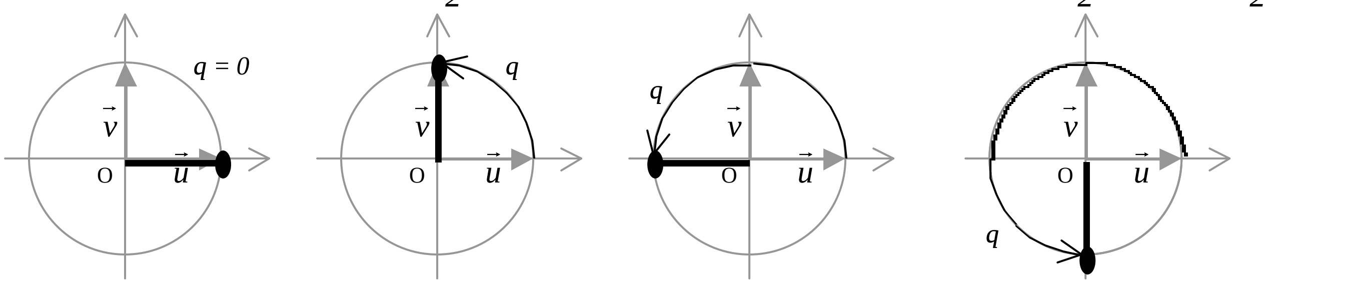
$\boxed{arg(z) = q\ [2\,p\,] = \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)\ [2\,p\,]}$

interprétation graphique des puissances de i :

$|i^n| = |i|^n = 1$ " *n* Î $\mathbb{Z}$

$i^0 = 1 = i^4$ $i^1 = i$ $i^2 = -1$ $i^3 = -i = i^{-1}$

$arg(i^0) = 0\ [2\,p\,]$ $arg(i^1) = \dfrac{p}{2}\ [2\,p\,]$ $arg(i^2) = p\ [2\,p\,]$ $arg(i^3) = \dfrac{3p}{2}\ [2\,p\,] = -\dfrac{p}{2}\ [2\,p\,]$



2.2.2 propriétés

" $x, y \in \mathbb{C}$ et " $a \in \mathbb{R}^{*+}$

$arg(\overline{x}) = - arg(x)$ [2 p]

$arg(a . x) = arg(x)$ [2 p]

si $x \neq 0$, $arg(\frac{1}{x}) = - arg(x)$ [2 p]

$arg(- x) = arg(x) + p$ [2 p]

$arg(x . y) = arg(x) + arg(y)$ [2 p]

$arg(x^n) = n . arg(x)$ [2 p] " $n \in \mathbb{Z}$

si $y \neq 0$, $arg(\frac{x}{y}) = arg(x) - arg(y)$ [2 p]

2.3 <u>forme trigonométrique</u>

2.3.1 définition

soit q = arg(z) [2 p] , la forme trigonométrique du complexe z est $\boxed{z = |z| . (\cos q + i . \sin q)}$

2.3.2 relations entre les notations

$Re(z) = |z| . \cos q = x$

$Im(z) = |z| . \sin q = y$

si $x \neq 0$, $\tan q = \frac{y}{x}$

$\cos q = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$\sin q = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

attention !

pour z = 0 , le module existe : $|0| = 0$ *, mais l'argument de 0 n'est pas défini,*

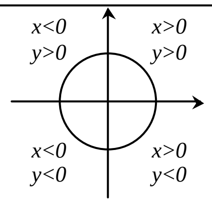
l'utilisation de la calculatrice pour les fonctions arcsin, arcos, arctan nécessite un peu de bon sens :

arcos : $[-1 ; 1] \to [0 ; p]$ — le résultat vaut q ou $-q$

arcsin : $[-1 ; 1] \to [-\frac{p}{2} ; \frac{p}{2}]$ — le résultat vaut q ou $p - q$

arctan : $\mathbb{R} \to]-\frac{p}{2} ; \frac{p}{2}[$ — le résultat vaut q [p]

pour éviter de se tromper, vérifier dans quel quadrant est q



3 <u>forme exponentielle d'un complexe</u>

3.1 <u>définition</u>

soit $z \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$ et $q \in \mathbb{R}$ *tels que* $|z| = r$ *et* $arg(z) = q$ [2p]

par convention, la forme exponentielle (ou exponentielle imaginaire) est $\boxed{z = r . e^{iq}}$

attention !

soit $z = - 3\ e^{iq}$ *, cette écriture est correcte* ***mais il ne faut pas en déduire*** ~~que $|z| = -3$~~

mais $|z| = 3$ *et* $arg(z) = q + p$ [2 p]

forme exponentielle de quelques complexes courants (avec q [2 p]) :

$1 = e^{i\cdot 0} = e^{i\cdot 2p} = e^{i\cdot 4p}$ etc $\quad - 1 = e^{i\cdot p} = e^{i\cdot 3p} = e^{i\cdot 5p}$ etc $\quad i = e^{i\cdot\frac{p}{2}} \quad - i = e^{-i\cdot\frac{p}{2}} = \frac{1}{i}$

$$1 + i = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos\frac{p}{4} + i \sin\frac{p}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{p}{4}} = \sqrt{2} e^{i\frac{9p}{4}} = \sqrt{2} e^{i\frac{17p}{4}} \text{ etc}$$

3.2 <u>propriétés</u>

3.2.1 formule de Moivre

$" q \in \mathbb{R}$ et $" n \in \mathbb{Z}$, $\left(e^{i\cdot q}\right)^n = e^{i\cdot nq}$ donc $\boxed{\left(cos q + i \cdot sin q\right)^n = cos\left(nq\right) + i \cdot sin\left(nq\right)}$

3.2.2 formules d'Euler

$$\left.\begin{array}{l} si\ z = e^{iq},\ alors\ \bar{z} = e^{-iq} \\ z + \bar{z} = 2 . Re(z) = 2 . cos q \\ z - \bar{z} = 2\, i . Im(z) = 2\, i . sin q \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \boxed{cos\ q = \frac{e^{iq} + e^{-iq}}{2}} \quad et \quad \boxed{sin\ q = \frac{e^{iq} - e^{-iq}}{2 \cdot i}}$$

3.2.3 applications

résolution d'équations

$" a, b \in \mathbb{R}^{*+}$ et $" a, b \in \mathbb{R}$ $\qquad a \cdot e^{ia} = b \cdot e^{ib} \quad \Leftrightarrow \quad a = b$ et $a = b\ [2 p\ ]$

calcul des formules de trigonométrie

$" a, b \in \mathbb{R}$ $\qquad sin(a+b) + sin(a-b) = 2 . sin(a) . cos(b)$

linéariser les expressions du type $sin^p q$ *avec* $p \in \mathbb{Z}$

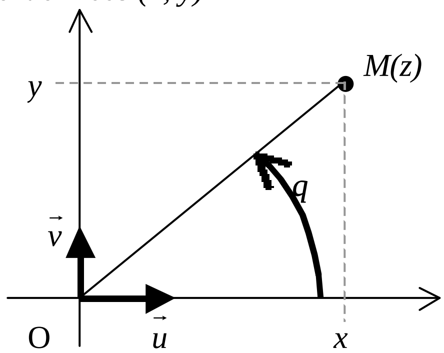
$" a \in \mathbb{R}$ $\qquad cos^3(a) = \frac{1}{4} cos(3a) + \frac{3}{4} cos(a)$

4 <u>interprétations graphiques</u>

4.1 <u>affixe z du point, d'un vecteur</u>

le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$
on associe au complexe $z = x + i . y$ *(forme algébrique) le point M de coordonnées (x, y)*

z est appelé l'affixe du point M ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$
et on obtient les relations suivantes :



$Re(z) = x = \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}$	représente l'abscisse du point M
$Im(z) = y = \vec{v} \cdot \overrightarrow{OM}$	représente l'ordonnée du point M
$arg(z) = q\ [2p\ ] = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$	représente d'angle entre $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OM}$
$\lvert z \rvert = \sqrt{x^2 + y^2} = \lVert \overrightarrow{OM} \rVert = OM$	représente la distance OM

la forme algébrique $x + i . y$ *correspond aux coordonnées cartésiennes (x , y) de M*
la forme exponentielle $r \cdot e^{iq}$ *correspond aux coordonnées polaires (r , q) du point M*

<u>remarque :</u> *sur les calculatrices, les transformations de coordonnées sont notées avec les appellations anglaises : Rec (rectangular) pour les coordonnées cartésiennes et Pol (polar) pour les coordonnées polaires (avec les conventions* $r \geq 0$ *et* $q \in \left[0;2p\right[$ *)*

4.2 propriétés

soient les points A, B, C d'affixe a, b, c

b - a est l'affixe de $\overrightarrow{AB}$

si $a \neq b$ $\qquad \arg(b-a) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right)\ [2p]$

si $a \neq b$ *et* $a \neq c$ $\qquad \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\ [2p]$

si $a \neq c$ $\qquad \left|\dfrac{b-a}{c-a}\right| = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \dfrac{AB}{AC}$

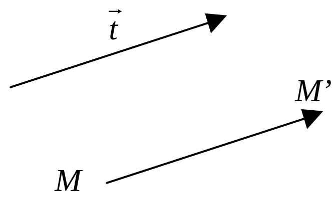
C milieu de [AB] $\quad \Leftrightarrow \quad c = \dfrac{a+b}{2}$

G d'affixe g est le barycentre
des points A_k *d'affixes* a_k *et de coefficients* $\boldsymbol{a}_k$
avec l'entier naturel $k \in [1;n]$ *et* $\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{a}_k \neq 0$

$$\Leftrightarrow \quad g = \frac{\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{a}_k \cdot a_k}{\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{a}_k}$$

4.3 transformations graphiques

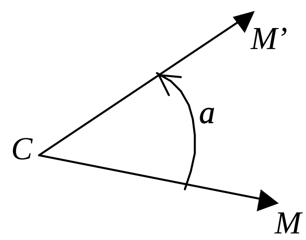
4.3.1 translation



soit la translation T : M(z) $\longmapsto$ *M'(z')*
de vecteur $\vec{t}$ *d'affixe t*
alors $\overrightarrow{MM'} = \vec{t}$

$$\boxed{z' = z + t}$$

4.3.2 rotation

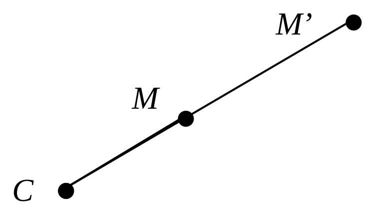


soit la rotation r : M(z) $\longmapsto$ *M'(z')*
de centre C d'affixe c et d'angle $\boldsymbol{a}$
alors CM' = CM
et $\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM'}\right) = \boldsymbol{a}\ [2p]$

$$\boxed{z' = c + e^{ia} \cdot (z - c)}$$

remarque : *une symétrie de centre C équivaut à une rotation de centre C et d'angle p*

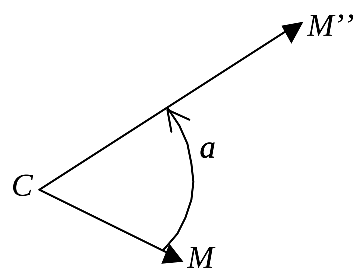
4.3.3 homothétie



soit l'homothétie h : M(z) $\longmapsto$ *M'(z')*
de centre C d'affixe c et de rapport $k \in \mathbb{R}$
alors $\overrightarrow{CM'} = k \cdot \overrightarrow{CM}$

$$\boxed{z' = c + k \cdot (z - c)}$$

4.3.4 composée homothétie-rotation de même centre



soit la rotation r : M(z) $\longmapsto$ *M'(z')*
de centre C d'affixe c et d'angle $\boldsymbol{a}$
soit l'homothétie h : M'(z') $\longmapsto$ *M''(z'')*
de centre C et de rapport $k \in \mathbb{R}$
on appelle similitude la composition de $r \circ h$ *: M(z)* $\longmapsto$ *M''(z'')*
de centre C, d'angle $\boldsymbol{a}$ *et de rapport k la transformation telle que*

$$\boxed{z'' = c + k \cdot e^{ia} \cdot (z - c)}$$

attention ! *k peut être négatif ; dans ce cas* $\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM''}\right) = \boldsymbol{a} + p\ [2p]$

5 équations dans $\mathbb{C}$

5.1 équation du 1er degré

soient a, b$\in\mathbb{C}$, on résout l'équation suivante sur $\mathbb{C}$: $a.z + b = 0$

cas 1/2 : a = 0 — *si b = 0* $S = \mathbb{C}$

si b ≠ 0 $S = \varnothing$

cas 2/2 : a ¹ 0 — $z = -\frac{b}{a}$ $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$

remarque : *donner le résultat avec un dénominateur réel*

5.2 équation du 2nd degré à coefficients réels

soient a, b, c$\in\mathbb{R}$, on résout l'équation suivante sur $\mathbb{C}$: $a\cdot z^2 + b\cdot z + c = 0$

cas 1/2 : a = 0 — *on se rapporte au cas ci-dessus*

cas 2/2 : a ¹ 0 — *calcul du discriminant* $\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c$

1/3 D > 0 — *il y a deux solutions réelles* $S = \left\{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a};\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}\right\}$

2/3 D = 0 — *il y a une solution réelle* $S = \left\{\frac{-b}{2\cdot a}\right\}$

3/3 D < 0 — *il y a deux solutions complexes conjuguées* $S = \left\{\frac{-b+i\cdot\sqrt{-\Delta}}{2\cdot a};\frac{-b-i\cdot\sqrt{-\Delta}}{2\cdot a}\right\}$

remarque : *pour résoudre des équations à coefficients réels de degré supérieur, on simplifie leur écriture pour se ramener à l'un des cas ci-dessus : si une racine réelle a est trouvée, on factorise le polynôme par (x-a) ; si une racine complexe z est trouvée, alors son conjugué $\bar{z}$ est aussi une racine et on peut factoriser par* $(x - z).(x - \bar{z}) = (x^2 - x.(z + \bar{z}) + |z|^2) = (x^2 - 2.x.Re(z) + Re^2(z) + Im^2(z))$

6 utilisations des complexes

attention ! *dans les paragraphes qui suivent et ici uniquement, on adoptera les notations de physique :*

le complexe i est appelé j afin de ne pas confondre avec le courant $j = e^{j\frac{p}{2}}$

la représentation graphique de l'argument d'un complexe utilise une convention différente des mathématiques

6.1 équation différentielle

6.1.1 résolution

soit la fonction $f(t) = a\cdot e^{b\cdot t}$ *avec* $a,b\in\mathbb{C}$

$f'(t) = a\cdot b\cdot e^{b\cdot t} = b\cdot f(t)$

$f''(t) = b\cdot f'(t) = b^2\cdot f(t)$

$f'''(t) = b\cdot f''(t) = b^3\cdot f(t)$

soit $a, b, g, d\in\mathbb{R}$ *et l'équation différentielle* $a\cdot f + b\cdot f' + g\cdot f'' + d\cdot f''' = 0$

cette équation différentielle admet des solutions de la forme $f(t) = a\cdot e^{b\cdot t}$ *avec* $a,b\in\mathbb{C}$

tel que b soit solution de l'équation $a + b\cdot b + g\cdot b^2 + d\cdot b^3 = 0$

écrivons a sous forme exponentielle et b sous forme algébrique $a = A\cdot e^{j\cdot j}$ *et* $b = B + j\cdot w$

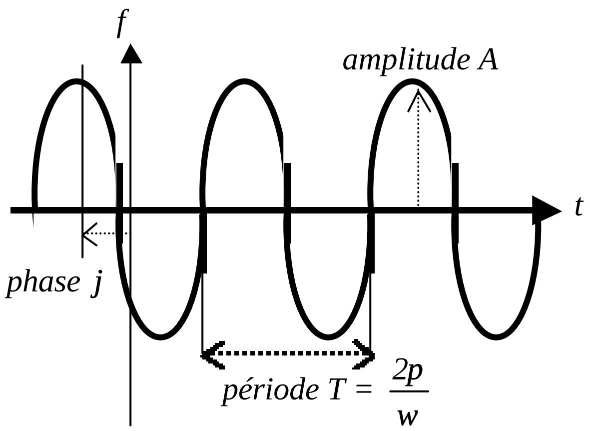
alors $f(t) = a\cdot e^{b\cdot t} = A\cdot e^{j\cdot j}\cdot e^{(B+jw)t} = A\cdot e^{j\cdot j}\cdot e^{Bt}\cdot e^{j\cdot w\cdot t} = A\cdot e^{B\cdot t}\cdot e^{j(w\cdot t+j)}$

6.1.2 exemples

$A, j, w > 0\ ;\ B = 0 \qquad f(t) = A \cdot e^{j(w \cdot t + j)}$

représentons Re (f(t)) = A . cos(w . t + j)

cette courbe est celle de la tension dans
***un circuit LC parfait** (pas de résistance)*
u(t) = U . cos(w . t + j)
w est appelé la pulsation

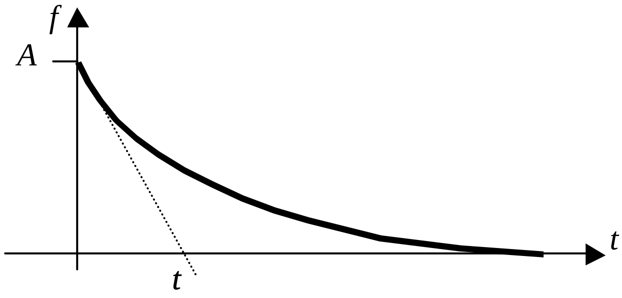


$A > 0\ ;\ B < 0\ ;\ j, w = 0 \qquad f(t) = A \cdot e^{B \cdot t}$

en posant $B = -\dfrac{1}{t}$ *on a* $t = -\dfrac{1}{B} > 0$

et on peut écrire $\qquad f(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{t}}$

cette courbe est celle de la tension aux bornes
*d'un **condensateur qui se décharge sur une résistance***
la tangente en 0 coupe l'axe de t en t
t est appelé constante de temps du circuit

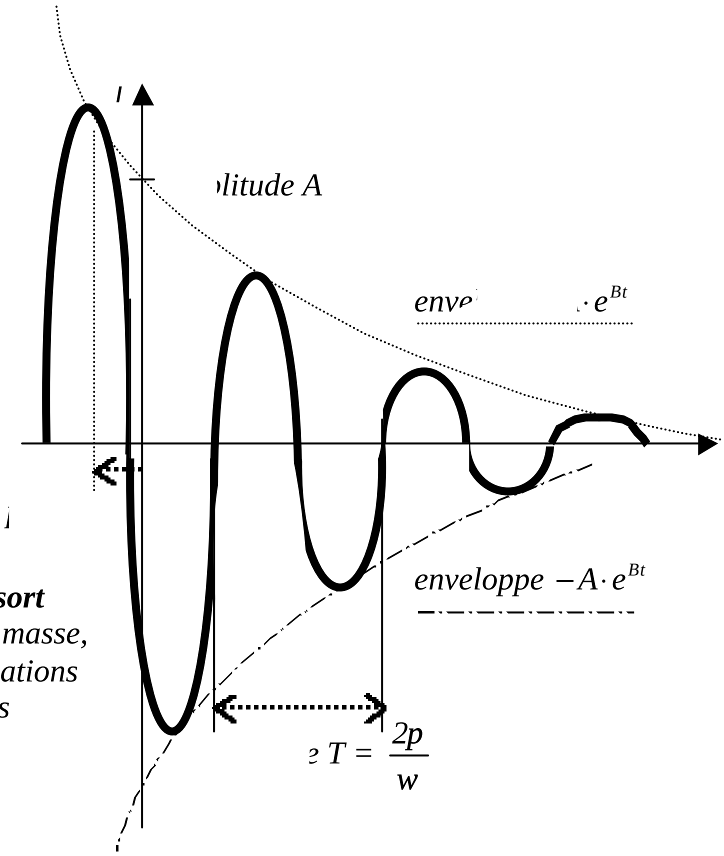


$A, j, w > 0\ ;\ B < 0 \qquad f(t) = A \cdot e^{Bt} \cdot e^{j(w \cdot t + j)}$

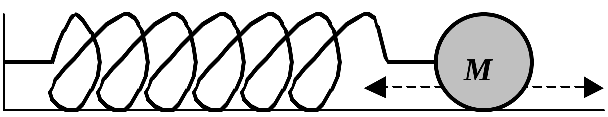
cette courbe est celle de la tension
*dans un **circuit RLC** sans générateur*

$u(t) = U \cdot e^{-\frac{t}{t}} \cdot cos(w \cdot t + j)$

le circuit oscille à une période $T = \dfrac{2p}{w}$
mais son amplitude s'amortit de manière
exponentielle car l'énergie se dissipe
sous forme de chaleur dans la résistance



*cette courbe est aussi celle de **l'amplitude d'un ressort***
dont une extrémité est fixe, l'autre accrochée à une masse,
qui est étiré puis lâché : la masse effectue des oscillations
dont l'amplitude s'amortit en raison des frottements

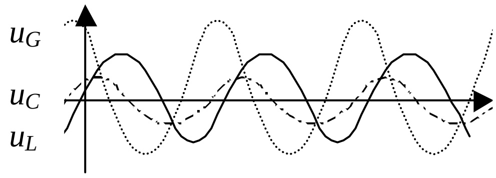


6.2 <u>représentation de Fresnel</u>

6.2.1 explication

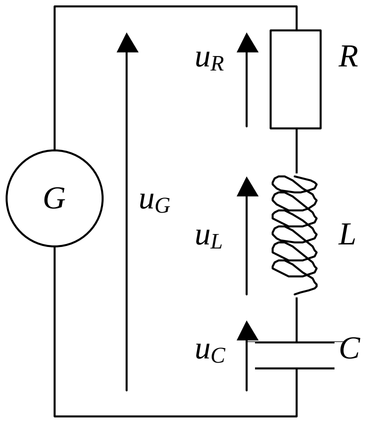
lorsqu'un générateur débite une tension dans un circuit électrique, les divers composants consomment l'énergie électrique de différentes manières

- *la résistance dissipe l'énergie sous forme de chaleur ;*
- *le condensateur (C) retarde les variations de la tension;*
- *la bobine (L) retarde les variations du courant.*



un générateur de tension sinusoïdale impose (après un court régime transitoire) au reste du circuit d'osciller à la même vitesse : on parle de ***pulsation*** *w ; elle est commune à toutes le tensions et à tous les courants dans chaque composant du circuit.*
en revanche, ***l'amplitude*** *de la tension aux bornes d'un composant varie d'un composant à l'autre ; de même, le décalage entre la tension aux bornes d'un composant et la tension du générateur varie d'un composant à l'autre : on parle de* ***phase j .***

- la tension du générateur $u_G(t) = U_G . cos(w . t + j)$
est la partie réelle de la fonction $U_G \cdot e^{j\cdot(w\cdot t+j)}$
- puisque tout le circuit oscille à la même pulsation w ,
on ne cherche pas à représenter cette information.
- pour visualiser l'amplitude U_G et la phase j ,
on associe à la tension $u_G(t)$ ***l'amplitude complexe*** $U_G(t) = U_G \cdot e^{j\cdot j}$

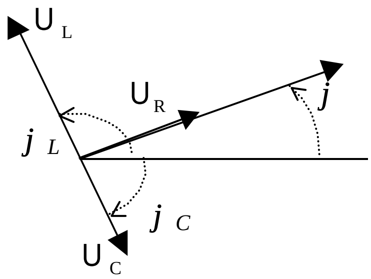


- de même, on associe une amplitude complexe à chaque tension :

$u_R(t) = U_R . cos(w . t + j)$ $\qquad U_R = U_R \cdot e^{j\cdot j}$

$u_L(t) = U_L . cos(w . t + j_L)$ $\qquad U_L = U_L \cdot e^{j\cdot j_L}$

$u_C(t) = U_C . cos(w . t + j_C)$ $\qquad U_C = U_C \cdot e^{j\cdot j_C}$



- sur le diagramme de Fresnel sont tracées
les amplitudes complexes associées à chaque tension du circuit
- chaque vecteur représente une amplitude complexe
- l'ensemble des vecteurs « tournent » dans la réalité à la vitesse w

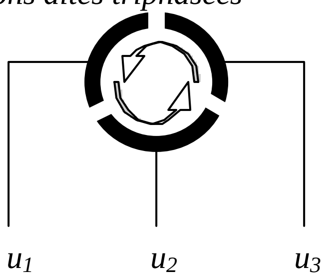
6.2.2 exemple des tensions triphasées

un moteur est alimenté par 3 tensions dites triphasées

$u_1(t) = U . cos(w . t - p)$

$u_2(t) = U . cos(w . t + \frac{p}{3})$

$u_3(t) = U . cos(w . t - \frac{p}{3})$



le diagramme de Fresnel correspondant est le suivant